

BORULARDAKİ SÜRTÜNME KAYIPLARI ANALİZİNDE DARCY-WEISBACH SÜRTÜNME KATSAYISI HESAPLARINDA COLEBROOK-WHITE DENKLEMİ YERİNE GEÇECEK DÖNGÜSEL OLMAYAN ÇÖZÜMLÜ DENKLEMLERİN HATA ANALİZİ

Dr. M. Turhan Çoban

EGE Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliđi Bölümü,
Bornova, İZMİR
turhan.coban@ege.edu.tr

ÖZET

Borulardaki sürtünme basınç kayıpları Darcy-Weisbach formula ile hesaplanır. Bu basınç kaybını hesaplamak için Darcy sürtünme katsayısının (f) hesaplanması gereklidir. Türbülanslı akışlarda Darcy sürtünme katsayısının hesaplanmasında en geçerli yöntem Colebrook-White denklemdir, ancak bu denklem sayısal kök bulma yöntemleri kullanılarak çözülebilen bir denklemdir. Colebrook-White denklemine yaklaşım yapan ve doğrudan çözülebilen çeşitli denklemler mevcuttur. Bu denklemlerin bazılarının Colebrook-White denklemiyle kıyaslandığında hata yüzdeleri çok küçük olduğundan, direk olarak bu denklemin yerine kullanılmaları mümkündür. Yazımızda çeşitli Darcy sürtünme faktörü denklemlerinin Colebrook – White denklemine göre göreceli hatası irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Darcy-Weisbach basınç düşümü, boru içi basınç düşümü, Colebrook denklemleri

ABSTRACT

Pressure drop in pipes can be calculated by using Darcy-Weisbach formula. In order to use this formula, Darcy friction factor should be known. The best approximation to Darcy friction factor for turbulent flow is given by Colebrook-White equation. This equation can only be solved by numerical root finding methods. There are several other approximation equations to Darcy friction factor with some relative error compared to Colebrook-White equation. In some of his equations the error percentage is so small that they can be directly used in place of Colebrook equation. In this study relative errors of several equations re evaluated.

Key-words: Darcy –Weisbach pressure drop formula, pressure drop in pipes, Colebrook equation, friction factors

1. GİRİŞ

Borulardaki sürtünme basınç kayıpları genellikle Darcy-Weisbach formülü ile hesaplanır.

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \rho \frac{V^2}{2} \quad (1)$$

Bu denklemde ΔP basınç düşümü, f sürtünme katsayısı, L boru boyu, D boru çapı, V akışkan hızı ve ρ ise akışkan yoğunluğudur. Denklemdeki f sürtünme katsayısı akış rejimine bağlıdır. Laminer akış şartlarında (Reynold sayısı $Re < 2300$) Hagen-Poiseuille denklemiyle hesaplanır

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (2)$$

Bu denklemdeki μ vizkozitedir, Re Reynold sayısı olarak adlandırılan boyutsuz hız parametresidir.

$$f = \frac{64}{Re} \quad (3)$$

Bu denklemde sürtünme katsayısı sadece Reynold sayısının fonksiyonudur. Geçiş bölgesi ve tam türbülanslı bölgeye geldiğimizde, sürtünme katsayısını Colebrook-White denklemleri ile tanımlayabiliriz.

2. SÜRTÜNME DENKLEMLERİ VE HATA ANALİZİ

Colebrook-White denklemi [1]

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[\frac{(\varepsilon/D)}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right] \quad (4)$$

Bu denklem ek olarak yüzey pürüzlülüğünün (ε) de fonksiyonudur. Denklemden de görüleceği gibi, Colebrook-White denkleminin direk olarak çözümü mevcut değildir. Çözüm için sayısal kök bulma metodlarını kullanmamız gerekir. Örnek olarak Newton-Raphson kök bulma metodunu kullanırsak, denklemin çözümünü aşağıdaki gibi gerçekleştirebiliriz:

$$X = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (5)$$

$$f(X) = X + 2 \log_{10} \left[\frac{(\varepsilon/D)}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} X} \right] \quad (6)$$

$$\frac{df(X)}{dX} = 1 + 2 \frac{\frac{2.51}{\text{Re}}}{\left[\frac{(\varepsilon/D)}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} X} \right]} \quad (7)$$

$$X_{k+1} = X_k - \frac{[f(X)]_k}{\left[\frac{df(X)}{dX} \right]_k} \quad k = 0, \dots, n \quad (8)$$

Bu denklem iteratif çözüm gerektirir. Aynı zamanda bir ilk tahmin değerine de ihtiyaç gösterir. İlk tahmin değeri çözümden çok uzaksa çözümün başarılı olamama olasılığı da mevcuttur. İlk tahmin değeri için burada verilen yaklaşım formüllerinden birisi kullanılabilir. Temel olarak Haaland denklemi gibi iterative yaklaşım gerektirmiyen denklemler Colebrook-White denkleminin çözümünde ilk tahmin değeri olarak kullanılmaktaydı. Ancak yeni geliştirilen ve aşağıda listelenen denklemlerin bazıları sonuç olarak Colebrook-White denklemi sonuçlarıyla oldukça yakın sonuçlar vermektedir. Belli hassasiyet seviyesinin altına indiğimizde Colebrook-White denkleminin iteratif kök bulma metodları kullanılarak çözülmesi gereği tamamen ortadan kalkmaktadır. Boru basınç düşümü analizlerinin bilgisayar ortamında yapıldığı günümüzde bu özellik bilgisayar hesaplamalarında zaman kazanma ve hesaplamaların daha basit MS excell gibi ortamlarda hesaplanabilmesi kolaylığı sağlaması açısından oldukça önemlidir. Aşağıda çeşitli Colebrook-White denklemi yaklaşım formülleri verilmiştir.

Haaland denklemi [2]

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log_{10} \left[\left(\frac{(\varepsilon/D)}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right] \quad (9)$$

Moody denklemi [3]

$$f = 5.5 \times 10^{-3} \left[1 + \left(2 \times 10^4 (\varepsilon/D) + \frac{10^6}{\text{Re}} \right)^{1/3} \right] \quad (10)$$

Wood denklemi [4] Geçerlilik bölgesi : $\text{Re} > 10000$, $10^{-5} < (\varepsilon/D) < 0.04$

$$a = 0.53(\varepsilon/D) + 0.094(\varepsilon/D)^{0.225} \quad (11)$$

$$b = 88(\varepsilon / D)^{0.44} \quad (12)$$

$$C = 1.62(\varepsilon / D)^{0.134} \quad (13)$$

$$f = a + b \text{Re}^{-C} \quad (14)$$

Churchill denklemi [5] Geçerlilik bölgesi : Tüm değerler için geçerlidir

$$A = \left[-2 \log_{10} \left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7} + \left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{0.9} \right) \right]^{16} \quad (15)$$

$$B = \left(\frac{37530}{\text{Re}} \right)^{16} \quad (16)$$

$$f = 8 \left[\left(\frac{8}{\text{Re}} \right)^{12} + (A + B)^{-3/2} \right]^{1/12} \quad (17)$$

Chen denklemi [6] Geçerlilik bölgesi : Tüm değerler için geçerlidir

$$A = \log_{10} \left(\frac{(\varepsilon / D)^{1.1098}}{2.8257} + \frac{5.8506}{\text{Re}^{0.8981}} \right) \quad (18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[\left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7065} \right) - \frac{5.0452A}{\text{Re}} \right] \quad (19)$$

Swamee-Jain denklemi [7] Geçerlilik bölgesi : $5000 > \text{Re} > 10^7$, $0.00004 < (\varepsilon / D) < 0.05$

$$A = \log_{10} \left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \quad (20)$$

$$f = \frac{0.25}{A^2} \quad (21)$$

Zigrang - Sylvester denklemi [8] Geçerlilik bölgesi : Tüm değerler için geçerlidir

$$A = \log_{10} \left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7} + \frac{13}{\text{Re}} \right) \quad (22)$$

$$B = \log_{10} \left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7} - \frac{5.02A}{\text{Re}} \right) \quad (23)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[\left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7} \right) - \frac{5.02B}{\text{Re}} \right] \quad (24)$$

Serghides denklemi [9] Geçerlilik bölgesi : Tüm değerler için geçerlidir

$$A = -2 \log_{10} \left[\left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7} \right) + \frac{12}{\text{Re}} \right] \quad (25)$$

$$B = -2 \log_{10} \left[\left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7} \right) + \frac{2.51A}{\text{Re}} \right] \quad (26)$$

$$C = -2 \log_{10} \left[\left(\frac{(\varepsilon / D)}{3.7} \right) + \frac{2.51B}{\text{Re}} \right] \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = A - \frac{(B - A)^2}{C - 2B + A} \quad (28)$$

Goudar- Sonnad denklemi [10] Geçerlilik bölgesi : Tüm değerler için geçerlidir

$$a = \frac{2}{\ln(10)} \quad (29)$$

$$b = \frac{(\varepsilon/D)}{3.7} \quad (30)$$

$$d = \frac{\ln(10)}{5.02} \text{Re} \quad (31)$$

$$s = bd + \ln(d) \quad (32)$$

$$q = s^{(s/(s+1))} \quad (33)$$

$$g = b * d + \ln(d/q) \quad (34)$$

$$z = \left(\frac{q}{g} \right) \quad (35)$$

$$\delta_{LA} = \frac{g}{g+1} z \quad (36)$$

$$\delta_{CFA} = \delta_{LA} \left(1 + \frac{z/2}{(g+1)^2 + (z/3)(2g-1)} \right) \quad (37)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = a \left[\ln \left(\frac{d}{q} \right) + \delta_{CFA} \right] \quad (38)$$

Romeo Denklemi [11] Geçerlilik bölgesi : Tüm değerler için geçerlidir

$$A = \log_{10} \left[\left(\frac{(\varepsilon/D)}{7.7918} \right)^{0.9924} + \left(\frac{5.3326}{208.815 + \text{Re}} \right)^{0.9345} \right] \quad (39)$$

$$B = \log_{10} \left(\frac{(\varepsilon/D)}{3.827} - \frac{4.567A}{\text{Re}} \right) \quad (40)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[\left(\frac{(\varepsilon/D)}{3.7065} \right) - \frac{5.0272B}{\text{Re}} \right] \quad (41)$$

Bu denklemlerin Colebrook-White denklemine ne kadar yaklaştığını irdelemek amacıyla bu denkleme göre hata miktarları Re sayısının ve (ε/D) oranının fonksiyonu olarak hesaplanmıştır. Hata terimi

$$\%hata = \frac{(f_{\text{Colebrook-White}} - f)}{f_{\text{Colebrook-White}}} \times 100 \quad (42)$$

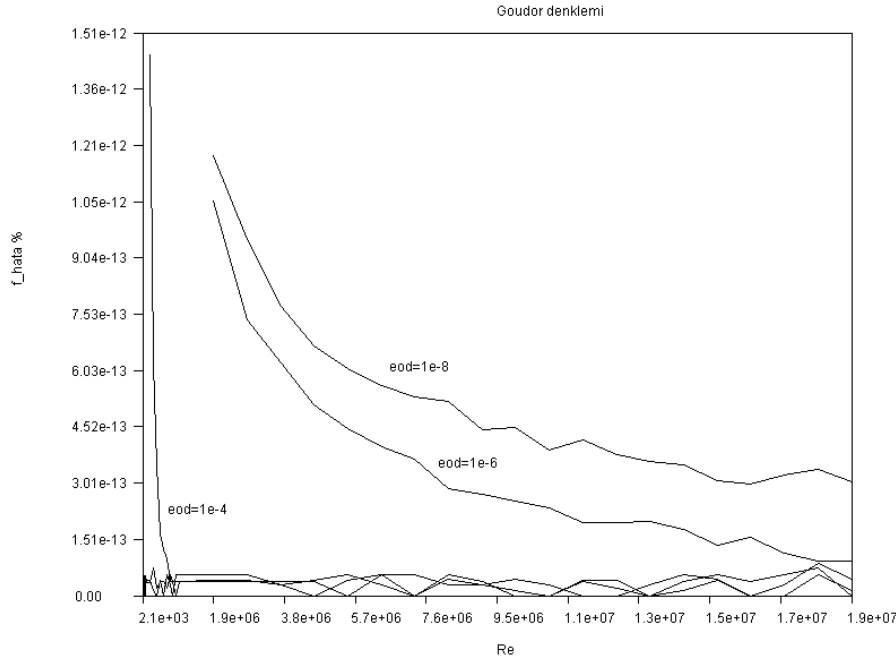
Denklemi ile hesaplanmıştır.

3. SONUÇLAR

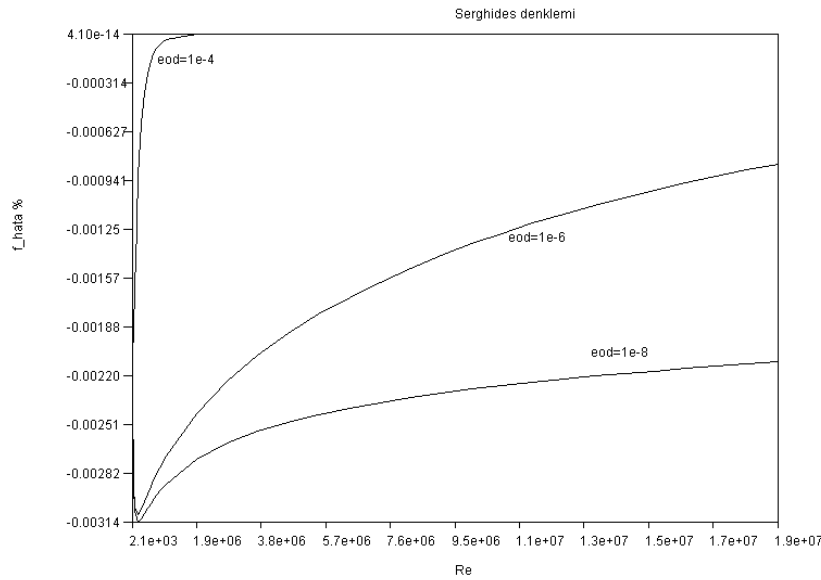
Sonuçlar grafik formunda sunulmuştur. Hata analizinden elde edilen başlıca sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Geçiş bölgesinde hata daha yüksektir, türbülans arttıkça(daha büyük Re sayıları için) hata küçülmektedir.
- Hata Miktarlarına göre sıralama yapılacak olursa en iyiden başlayarak : Goudar-Sonnad denklemi, Serghides denklemi, Romeo denklemi, Zigrand denklemi ve Chen denklemidir. Geri kalan denklemlerde hata miktarı daha büyük olduğundan burada listelenmemiştir.

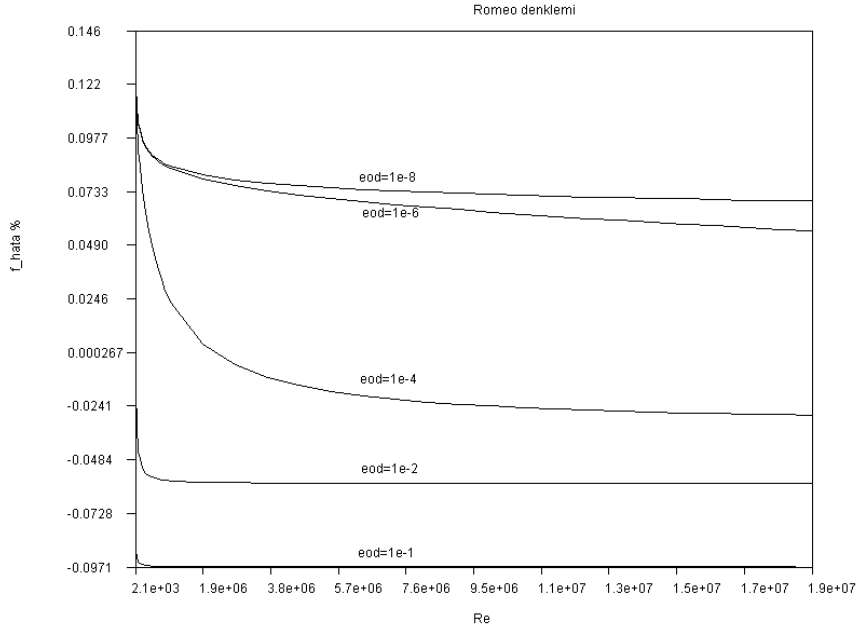
- Hata derecesi olarak karşılaştırma yapıldığında Goudar-Sonnad denklemi 10^{-12} seviyesine varan küçük hatayla nerdeyse bire bir Colebrook-White denklemi sonuçlarını aynen oluşturmaktadır. Ondan sonraki en iyi denklem olan Serghides denklemi de 10^{-4} hata seviyesiyle paratik olarak kullanılabilir bir denklemdir.
- Bu denklemler yeterince hassas olduğundan Colebrook-White denkleminin iterative çözüm gereksinimi ortadan kalkmış görünmektedir.



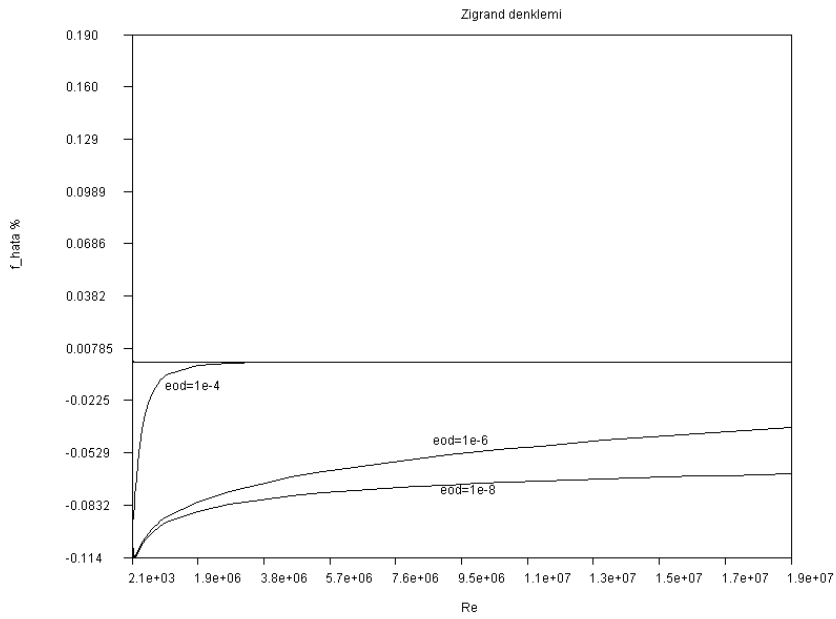
Şekil 1 Goudar denkleminin Colebrook-White denklemiyle karşılaştırılmasındaki % hata miktarı



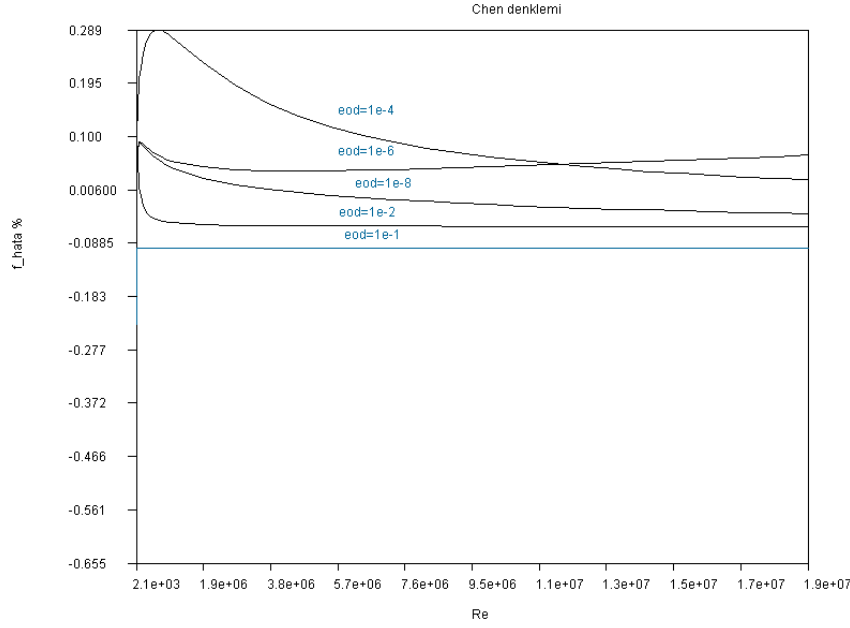
Şekil 2 Serghides denkleminin Colebrook-White denklemiyle karşılaştırılmasındaki % hata miktarı



Şekil 3 Romeo denkleminin Colebrook-White denklemiyle karşılaştırılmasındaki % hata miktarı



Şekil 4 Zigrand denkleminin Colebrook-White denklemiyle karşılaştırılmasındaki % hata miktarı



Şekil 5 Chen denkleminin Colebrook-White denkleminle karşılaştırılmasındaki % hata miktarı

4. REFERANSLAR

1. **Colebrook, C.F. and White, C.M.**, "Experiments with Fluid friction roughened pipes.", Proc. R.Soc.(A), 161,1937.
2. **Haaland, S.E.**, "Simple and Explicit formulas for friction factor in turbulent pipe flow.", Trans. ASME, JFE, 105, 1983.
3. **Moody, L.F.**, "Friction factors for pipe flows.", Trans. ASME, 66,641,1944.
4. **Wood, D.J.**, "An Explicit friction factor relationship.", Civil Eng., 60-61,1966.
5. **Churchill, S.W.**, "Friction factor equations spans all fluid-flow ranges.", Chem. Eng., 91,1977.
6. **Chen, N.H.**, "An Explicit Equation for Friction factor in Pipe", Ind. Eng. Chem. Fundam., Vol. 18, No. 3, 296-297, 1979.
7. **Swamee, P.K. and Jain, A.K.**, "Explicit equation for pipe flow problems.", J. Hydr. Div., ASCE, 102(5), 657-664, 1976.
8. **Zigrang, D.J. and Sylvester, N.D.**, "Explicit approximations to the Colebrook's friction factor.", AIChE J. 28, 3, 514, 1982.
9. **Serghides, T.K.**, "Estimate friction factor accurately", Chem. Eng. 91, 1984, pp. 63-64
10. **Goudar, C.T. and Sonnad, J.R.**, "Comparison of the iterative approximations of the Colebrook-White equation", Hydrocarbon Processing, August 2008, pp 79-83
11. **Romeo, E., Royo, C., and Monzon, A.**, "Improved explicit equations for estimation of the friction factor in rough and smooth pipes." *Chem. Eng. J.*, 86, 369-374, 2002.
12. **Nikuradse, J.** "Stromungsgesetze in rauhen Rohren." Ver. Dtsch. Ing. Forsch., 361, 1933.
13. **Barr, D.I.H.**, "Solutions of the Colebrook-White functions for resistance to uniform turbulent flows.", Proc. Inst. Civil. Engrs. Part 2. 71,1981.
14. **Liou, C.P.**, "Limitations and proper use of the Hazen-Williams equations.", J. Hydr., Eng., 124(9), 951-954, 1998.
15. **Manadilli, G.**, "Replace implicit equations with sigmoidal functions.", Chem.Eng. Journal, 104(8), 1997.
16. **McKeon, B.J., Swanson, C.J., Zagarola, M.V., Donnelly, R.J. and Smits, A.J.**, "Friction factors for smooth pipe flow.", J.Fluid Mechanics, Vol.541, 41-44,

2004.

17. **Round, G.F.**, “An explicit approximation for the friction factor-Reynolds number relation for rough and smooth pipes.”, Can. J. Chem. Eng., 58,122-123,1980.

18. **Schlichting, H.**, “Boundary-Layer Theory” ,McGraw–Hill, New York, 1979..

19. **U.S. Bureau of Reclamation.**, “Friction factors for large conduit flowing full.” Engineering Monograph, No. 7, U.S. Dept. of Interior, Washington, D.C, 1965.

20. **Von Bernuth, R. D., and Wilson, T.**, “Friction factors for small diameter plastic pipes.” J. Hydraul. Eng., 115(2), 183–192, 1989.

21. **Wesseling, J., and Homma, F.**, “Hydraulic resistance of drain pipes.” Neth. J. Agric. Sci., 15, 183–197, 1967.

22. **Zagarola, M. V.**, “Mean-flow Scaling of Turbulent Pipe Flow,” Ph.D.thesis, Princeton University, USA, 1996.

23. **White, Frank M.**, “Fluid Mechanics”, Fourth Edition, McGrawHill, 1998, ISBN 0-07-069716-7

24. **M. Turhan Çoban**, Makaledeki hata analizlerini hesaplayan Darcy_friction.java ve boru basınç düşümü program kodu

http://www.yto.com.tr/turhan_coban/programlar/boru%20bas%C4%B1n%C3%A7%20d%C3%BC%C5%9F%C3%BCm%C3%BC/pipe2Table.html